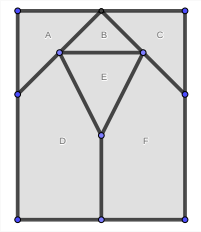
基于独立集的区域涂色方式计数方法

引言

对于排列组合中的区域上色问题，在中学阶段少有系统、规范的讨论方法。日常教学时老师会提到“将相同颜色的色块进行分组”，但实际操作过程中也常有遗漏，算了数分钟却发现ABCD都无法匹配的现象可谓屡见不鲜。本文将基于图论中的独立集，提出一种具有普遍性的统计方式，并探讨可能的优化方向。

例题

提供四种不同颜色的颜料给图中六个区域涂色，要求每个区域涂一种颜色，有公共边的两个区域不能涂相同的颜色，则不同的涂色方法共有（）种。

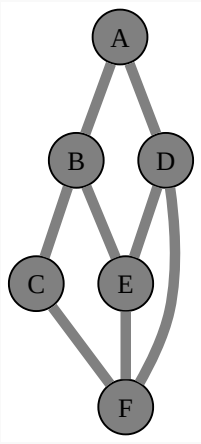


常规思路

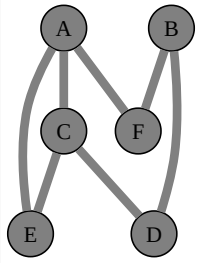
基于独立集的思路

理论

可将A~F抽象为图中的节点，用边连接具有公共边的色块对应的节点，形成图C_1:



将每个节点和与之相连的节点分离，和与之不相连的节点相连（即构建 C_1 的独立集），形成图C_2：



此时，C_2中的边所连接的节点对应的，就是“一对不具有公共边的色块”，也就是一对可以被涂上同种颜色的色块。
那么，对于C_2中的任意子图，如果其任意两个顶点间都有相邻的边，该子图对应的所有色块都可以被同种颜色涂色。
这样的子图在图论中被称为“团”。
方便起见，本文将用团的点集表示团，如 $\{A, C, E\}$ 表示由 A, C, E 三个节点组成的团
再将m种颜色分配给i个团，方案数为A_m^i。

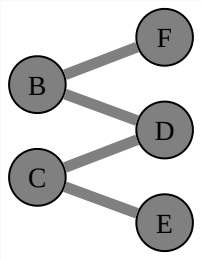
若将C_2拆分为i个团的方案数为n_i，提供的最大颜色数为m，总染色方案数为N，有：

$$N = \sum_{i=1}^{m} (n_i \times A_m^i)$$

实现

由于对任意节点，其参与形成的不同的团不会处于同一分割方式中，可递归地对图进行分割。

如，A 节点可形成 $\{A\}, \{A, C\}, \{A, E\}, \{A, F\}, \{A, C, E\}$几个团。
以分割 $\{A\}$ 为例。此时，除$\{A\}$以外的部分形成了一张新的子图 C_3：



选择 C_3 中的节点分类讨论，最终递归地统计每种分割方案产生的团的数量，即可得到表达式中的 n_i。
但在实际计算过程中，这种繁琐的递归不仅效率及其低下，也很容易出错。因此，对其进行优化是有必要的。

一种优化思路

分割时常常会遇到一类链状的图，如例题中的C_3。在图论中，这类图被称为路径图，含 n 个节点的路径图就用 P_n 表示。
这类路径图的节点排列方式各有不同，但具有相同的结构，也就有相同的分割方式与涂色方案。

定义 $f(i,k)$ 为“将路径图 P_k 分割为i个团的方案数"。考虑到路径图的团至多有2个节点，至少有1个节点， $f(i,k)\neq 0$ 时有 $i\in[\lceil\frac{k}{2}\rceil,k]$ 。
显然有 $f(k,k)=1$ 。
若将任意两相邻节点合并为新的团，则有 $C_{k-1}^1=k-1$ 种方案，即 $f(k-1,k)=k-1$ 。
$i<3$ 且 $n<4$时，路径图较为简单， $f(i,k)$ 的值小，可直接数出。见下表：

n	$f(i,n)$
1	$f(1,1)=1$
2	$f(1,2)=1,f(2,2)=1$
3	$f(1,3)=1,f(2,3)=2$

对于 $i\geq 3$或$n\geq 4$ 的路径图，可以在端点处递归分割，即 $f(i,k)=f(i-1,k-1)+f(i-1,k-2)$ 。

回到例题，显然C_3属于路径图 P_5 。对于 C_3，$i\in[2,3]$，$f(2,5)=0$ ，$f(3,5)=f(2,4)+f(2,3)=1+2=3$ 。即将 C_2分割为3个团的方案有0个，分割为4个团的方案有3个。

用相同方法处理剩下四种情况，即可得：

$$N=A_4^3\times(0+0+1+1+2)+A_4^4\times(3+2+3+3+1)=384$$